Prof. Dr. Alfred Toth

Nachfolgerrelation und Referenz

1. In der auf Peanozahlen basierenden Arithmetik ist ein Nachfolger einer Zahl x eine Zahl y, wenn $x < y$ gilt und keine Zahl zwischen x und y liegt. Das entsprechende Axiom lautet in der Fassung von Landau: „Zu jedem x gibt es genau eine natürliche Zahl, die der Nachfolger von x heißt“ (1930, S. 2).

2. In der Semiotik allerdings ist diese Eindeutigkeit von Nachfolger- (und, konvers, Vorgängerrelation) aufgehoben, vgl. die folgende Tabelle der Nachfolger der Subzeichen (Toth 2025a)

N(1.1) = (1.2), (2.1)

N(1.2) = (1.3), (2.2)

N(1.3) = (2.3)

N(2.1) = (2.2), (3.1)

N(2.2) = (2.3), (3.2)

N(2.3) = (3.3)

N(3.1) = (3.2)

N(3.2) = (3.3)

N(3.3) = Ø.

3.1. Noch mehr ist das Prinzip der Eindeutigkeit in verschiedenen ontischen Systemen gelockert. So können raumsemiotische Objekte keinen, einen oder mehrere Nachfolger haben. Ferner gilt die Zusatzbedingung der Ortsfunktionalität. So sind nach Toth (2025b) von den folgenden 3 mal 3 = 9 Möglichkeiten nur 6 ontisch realisierbar, weil die reflexiven Relationen dem Unizitätsprinzip ontischer Orte widersprechen (d.h. daß an 1 ontischen Ort immer nur genau 1 Objekt stehen kann):

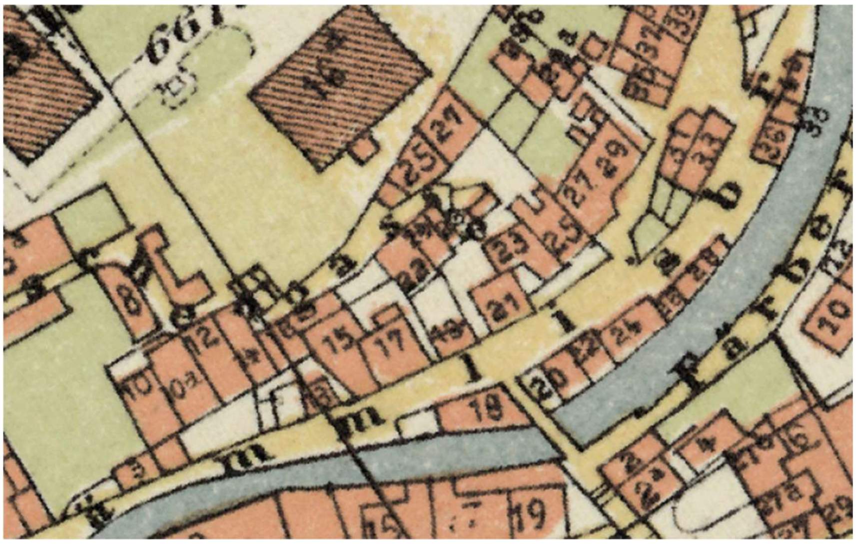
	Adj	Subj	Transj
Adj	—	x	x
Subj	x	—	x
Transj	x	x	—

3.2. Bei Häusern ist jedes Paar von Nummern eine geordnete Relation der Form

$N = \langle N(\omega_{i\lambda}), N(\omega_{j\rho})\rangle$.

Nummern werden also im Prinzip auf die gleiche Weise definiert wie die komplexen P-Zahlen (vgl. Toth 2025c). Im Unterschied zu einer P-Zahl $P(\omega_i)$ besitzt eine Nummer $P(\omega_{i\zeta})$ ($\zeta = \lambda$ oder $\zeta = \rho$) Referenz, da die Abbildung einer Nummer auf ein System bijektiv ist. Nummern verhalten sich also eher wie Ordinal- als Kardinalzahlen. Es gibt bei Nummern weder ein absolutes Anfangselement noch eine strikte Peanonachfolge. Wegen der Referenz verhalten sie sich aber auch wie Zeichen, d.h. sie stehen irgendwo zwischen Zahl und Zeichen (vgl. dazu ausführlich Toth 2021).

Betrachten wir den folgenden Katasterplanausschnitt der Stadt St. Gallen von 1891



Die Lämmlisbrunnenstraße abwärts finden wir folgende Distribution der $N = \langle N_{i\lambda}. N_{j\rho}\rangle$

$N_{i\lambda}$	3	13	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39
$N_{j\rho}$	18	20	22	24	26	28	36	40						

und der $\langle N(\omega_{i\lambda}). N(\omega_{j\rho})\rangle$:

$N(\omega_{i\lambda})$	3	13	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39
$N(\omega_{j\rho})$				18	20	22	24	26	28			36	38	40

Die Abbildungen haben hier also die folgende Form:

$$x \quad \to \quad \langle y_{1\lambda}, y_{2\rho}\rangle \quad \circ \quad \langle y'_{1\lambda}, y'_{2\rho}\rangle.$$

Die Definition einer Nummer als $N = \langle N(\omega_{i\lambda}). N(\omega_{j\rho})\rangle$ kann indessen ungenügend sein, vgl. den folgenden Planausschnitt

Hier stehen sich zwei Nummern der subjazenten Form

$$N = \binom{39a}{39} = N_i\binom{\omega j + 1}{\omega j}$$

gegenüber. Das adjazente Gegenstück finden wir gleich daneben:

$$N = (39b, 39c, 39d) = N_i(\omega_i, \omega_{i+1}, \omega_{i+2}),$$

d.h. wir müssen ausgehen von

$$<N_i, <\omega_j, \omega_{j+1}, \omega_{j+2}, \ldots, \omega_{j+n}>,$$

wir haben also statt einem ontischen Ort eine Menge von ontischen Orten. Diese können entweder in adjazenter oder in subjazenter Relationen stehen; als Variante von letzterer auch in transjazenter Relation (vgl. Toth 2015):

$$<N_i, <\omega_j, \omega_{j+1}, \omega_{j+2}, \ldots, \omega_{j+n}>$$

$$\swarrow \qquad \searrow$$

$$\omega_j \qquad <\omega_j, \omega_{j+1}, \omega_{j+2}, \ldots, \omega_{j+n}>$$

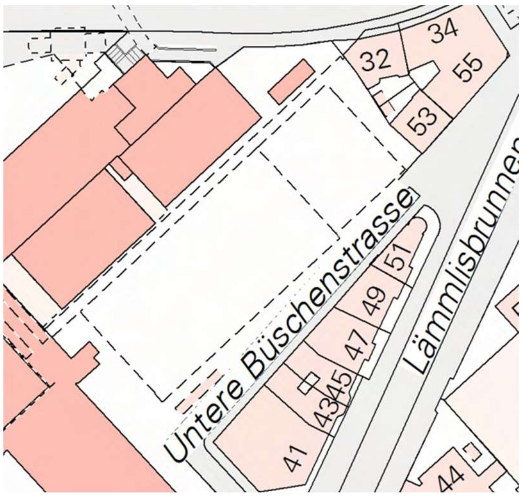
$$\begin{pmatrix} \omega_{j+1} \\ \omega_{j+2} \\ \ldots \\ \omega_{j+n} \end{pmatrix}$$

Schließlich gibt es Fälle, die der Bijektion zwischen dem Zahl- und dem Zeichenanteil der Nummer zu widersprechen scheinen, d.h. es gibt z.B. Häuser, welche mehr als eine Hausnummer tragen. Dies ist aber nur dann möglich, wenn mehr als ein Referenzsystem an den Abbildungen beteiligt ist (wodurch die Bijektion sekundär wiederhergestellt wird), vgl. den folgenden Katasterplanausschnitt der Stadt St. Gallen von 2021:

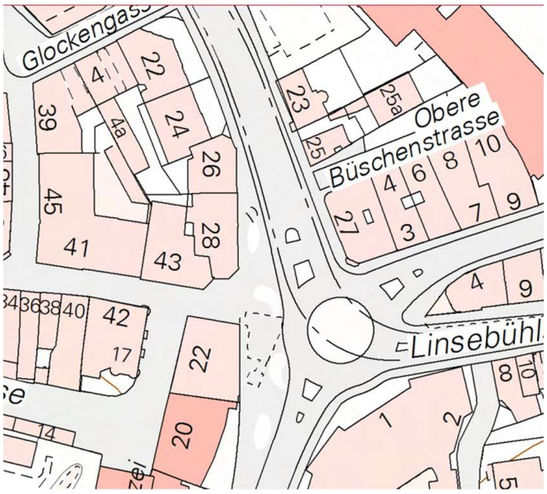
Hier finden wir die zwei Referenzsysteme Obere Büschenstraße (Bü) und (auf der Karte unten; nicht angeschrieben) Lämmlisbrunnenstraße (Lä):

$N_i(\omega_j, \mathrm{Ref} = \mathrm{Bü})$	4	6	8	10
$N_i(\omega_j, \mathrm{Ref} = \mathrm{Lä})$	3		7	8

Es gibt allerdings auch inaktive Referenzsysteme, d.h. solche, deren Abbildungen = 0 sind. Vgl. den nächsten Planausschnitt: Die untere Büschenstraße „vergibt" keine einzige Hausnummer, denn die Nummern 41 bis und 51 sowie 53 und 55 haben als Referenzsystem die Lämmlisbrunnenstraße (und die beiden in subjazenter Relation zu 53 und 55 liegenden Häuser haben als Referenzsystem die im Planausschnitt nicht angeschriebene Rorschacherstraße).



Im folgenden Planausschnitt



gehören links oben die Nummern 28, 26, 24 und 22 zum Referenzsystem Burggraben (das Referenzsystem Glockengasse beginnt erst mit der Nummer 4!), auch die gegenüberliegenden Nummern 27, 25 und 23 gehören zu Ref = Burggraben. Aber die Nummern links unten: 22 und 20 gehören nicht zu ihm, sondern zum Referenzsystem Zeughausgasse (nicht eingezeichnet). Rechts kommen die bereits behandelten Referenzsysteme Obere Büschenstraße, Lämmlisbrunnenstraße und Linsebühlstraße dazu. D.h. wir haben hier auf engstem Raum mindestens 6 Referenzsysteme, die sich gegenseitig überlappen.

Zusammenfassend haben wir also 1-dimensionale Nachfolgerrelationen bei den Peanozahlen (ohne Referenz) sowie 2-dimensionale in der Semiotik bei den Peircezahlen und in der Ontik bei den Nummern (beide mit, je unterschiedlicher, Referenz). Ein Beispiel für 3-dimensionale Nachfolgerrelationen stellt z.B. die Geisterbahn dar. Hier gibt es, entsprechend dem kubischen Raummodell, für jedes P_i 6 ontische Orte, d.h. wir gehen aus von

$$P = P_i(\omega_{jo}, \omega_{ju}, \omega_{jv}, \omega_{jh}, \omega_{j\lambda}, \omega_{j\rho})$$

mit

$$NP = (\omega_{jo+k}, \omega_{ju+k}, \omega_{jv+k}, \omega_{jh+k}, \omega_{j\lambda+k}, \omega_{j\rho+k})$$

(wobei o/u = oben/unten, v/h = vorn/hinten, λ/ρ = links/rechts).

Literatur

Landau, Edmund, Grundlagen der Analysis. Leipzig 1930

Toth, Alfred, Zählen mit ortsfunktionalen Peanozahlen. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2015

Toth, Alfred, Nummerntheorie. Konstanz 2021 (= Kybernetische Semiotik, Bd. 19)

Toth, Alfred, Nachfolgerrelationen von Subzeichen. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2025a

Toth, Alfred, Ontische Nachfolgerrelationen. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2025b

Toth, Alfred, Orte von Objekten. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2025c

8.4.2025